УДК 378

РАБОТА С ТЕОРЕМОЙ ПОМПЕЙЮ НА ЭТАПЕ ПОИСКА РАЗЛИЧНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Калинин С.И., доктор педагогических наук, профессор
Вятский государственный университет, г. Киров
kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Статья посвящается характеризации этапа поиска различных доказательств теоремы на примере утверждения Помпейю о среднем значении дифференцируемой функции.

Ключевые слова: работа с теоремой, этап поиска различных доказательств, теорема Помпейю.

WORKING WITH THE THEOREM POMPEIU IN THE SEARCH FOR VARIOUS PROOFS

S. I. Kalinin, doctor of pedagogical sciences, professor,
Vyatka State University, Kirov
kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The article is devoted to characterizing the stage of searching for various proofs of the theorem by the example of Pompeiu's statement about the mean value of a differentiable function.

Keywords: work with the theorem, the stage of searching for various proofs, the Pompeiu theorem.

Как известно, деятельностная составляющая содержания обучения будущих учителей математики в качестве одного из основных направлений включает в себя работу с теоремой. При организация деятельности, связанной с изучением конкретной теоремы, преподаватель обычно настраивает студентов на прохождение следующих принципиальных этапов: 1) рассмотрение мотивации изучения теоремы; 2) осмысление отражаемого в теореме факта; 3) усвоение содержания теоремы; 4) осмысление метода доказательства; 5) реализация данного метода при доказательстве теоремы; 6) попытка рассмотрения иных способов доказательства данной теоремы; 7) при наличии таковых необходимо их сравнение на предмет определения наиболее эффективного, рационального, эстетичного; 8) рассмотрение возможных применений теоремы; 9) установление связей теоремы с ранее изученными утверждениями; 10) получение по возможности различных следствий установленной теоремы. Обозначим, наконец, еще такие три этапа работы с теоремой: 11) попытка рассмотрения обобщений доказанной теоремы; 12) осмысление возможностей ее развития; 13) формулировка новых гипотез и открытых вопросов, восходящих к изучаемой теореме.

В настоящей статье, обращаясь к важной теореме Помпейю из дифференциального исчисления функций одной переменной, мы намерены остановиться на характеризации этапа поиска различных доказательств утверждения.

Подчеркнем, что отмечаемая в заголовке теорема до 2016 г. практически не была представлена в научной и учебно-методической литературе на русском языке, хотя она гармонично вписывается в известный перечень классических теорем о среднем – Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Флетта. Впервые с формулировкой данной теоремы мы познакомились по краткому реферату 16.11.–13Б.2 статьи «Обобщенное неравенство Помпейю для локально дробных интегралов и его применения» (Appl. Math. And Comput. 2016. 274, с.282–291) реферативного журнала «Математика». Ее осмысление привело к появлению нашей работы [1], в которой ставится цель – попытаться познакомить русскоязычного читателя как с самой теоремой Помпейю, так и ее некоторыми обобщениями.

Упоминаемая теорема есть следующее утверждение о среднем значении для дифференцируемой на отрезке функции.

Теорема 1 (D. Pompeiu). Пусть f – дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ числовой прямой функция, при этом $0 \notin [a;b]$. Тогда для любых двух различных точек x_1, x_2 из $[a;b]$ найдется лежащая между ними точка ξ такая, что

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{1}$$

Данная теорема впервые была установлена в статье [3]. С ее доказательством читатель может познакомиться, обратившись к доступной работе [2]. Мы же в данном месте скажем, что анализ доказательства из цитируемой работы позволяет заключить о возможности формулирования теоремы 1 в более слабых предположениях относительно функции f – достаточно предполагать ее непрерывность на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемость на интервале $(a;b)$.

С учетом сказанного переформулируем теорему 1 в форме, присущей классическим «французским» теоремам о среднем значении.

Теорема 2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, не содержащем точки $x=0$, и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда найдется точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{2}$$

Теорему 2 условимся называть так же, как и теорему 1 – теоремой Помпейю, а соотношение (2) – формулой Помпейю.

В настоящей статье мы рассмотрим четыре доказательства теоремы 2. Они будут принципиально отличаться друг от друга, хотя, заметим, каждое из первых трех использует один и тот же эвристический прием – введение в рассмотрение вспомогательной функции. Четвертое же доказательство будет основываться на геометрическом подходе.

В качестве первого доказательства реализуем то, которое использует метод выше цитируемой работы [2].

Доказательство 1. Введем вспомогательную функцию $F(t) = t\,f\left(\frac{1}{t}\right)$. Она непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$ и дифференцируема на интервале $\left(\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right)$. Следовательно, в силу теоремы Лагранжа найдется хотя бы одна точка η, принадлежащая интервалу $\left(\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right)$, для которой будет верно соотношение

$$\frac{F\left(\frac{1}{a}\right) - F\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = F'(\eta),$$

или

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta} f'\left(\frac{1}{\eta}\right). \tag{3}$$

Полагая в (3) $\frac{1}{\eta} = \xi$, получаем формулу Помпейю (2). Теорема 2 доказана.

Доказательство 2. Снова используем метод введения вспомогательной функции. В качестве таковой возьмем функцию

$$\Phi(x) = \frac{(a-b)f(x) - af(b) + bf(a)}{x}, \quad x \in [a,b].$$

Данная функция, очевидно, непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема внутри его. Кроме того, нетрудно проверить, что $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a) - f(b)$. Следовательно, функция Φ на отрезке $[a;b]$

удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Согласно этой теореме найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что будет справедливо условие

$$\Phi'(\xi) = \frac{(a-b)(\xi f'(\xi) - f(\xi) + af(b) - bf(a))}{\xi^2} = 0.$$

Из него следует справедливость формулы (2). Доказательство 2 завершено.

Обратим внимание читателя на то, что вспомогательные функции $F(t)$ и $\Phi(x)$, использованные в проведенных доказательствах теоремы Помпейю, в своем определении принципиально учитывают ограничение $0 \notin [a;b]$.

Прежде, чем реализовать третье доказательство теоремы 2, установим следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть $\varphi : [a;b] \to \mathbf{R}$ $\quad (0 \notin [a;b])$ – функция, удовлетворяющая всем условиям классической теоремы Ролля о среднем значении, то есть 1) φ непрерывна на рассматриваемом отрезке; 2) дифференцируема внутри его; 3) $\varphi(a) = \varphi(b)$. Тогда на интервале (a;b) найдется хотя бы одна точка ξ такая, что

$$\varphi(a) = \varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi). \tag{3}$$

Доказательство. Если $\varphi(x) \equiv const$, то соотношение (3) выполняется с очевидностью.

Предположим, что условие $\varphi(x) \equiv const$ не выполняется. Рассмотрим угол α, под которым виден график Γ_φ функции φ из точки $M_0(0;\varphi(a))$. В силу условия $0 \notin [a;b]$ и непрерывности φ сторонами данного угла будут являться невертикальные лучи, исходящие из точки M_0 и опорные к Γ_φ, при этом хотя бы один из них не будет содержать в себе хорду, стягивающую концы кривой Γ_φ. Такой луч обозначим l.

В силу условия 2) леммы Γ_φ есть гладкая на интервале (a,b) кривая, следовательно, продолжение l является касательной к Γ_φ в некоторой его точке $P(c;\varphi(c))$, $c \in (a;b)$. Запишем уравнение данной касательной:

$$y = \varphi(c) + \varphi'(c)(x - c).$$

Полагая в нем $x = 0$, найдем значение ординаты y_{M_0} точки M_0:

$$y_{M_0} = \varphi(c) + \varphi'(c)(-c).$$

С другой стороны, $y_{M_0} = \varphi(a)$, потому можно заключить, что искомой точкой ξ является точка c. Лемма доказана.

Доказательство 3. Введем в рассмотрение функцию

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет всем условиям установленной леммы. Следовательно, для нее будет выполняться соотношение вида (3):

$$G(a) = G(\xi) - \xi G'(\xi),$$

где $\xi \in (a;b)$ – некоторая средняя точка. Более подробно это соотношение распишется так:

$$f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a =$$

$$= f(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\xi - \xi\left(f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right), \ \xi \in (a;b).$$

Отсюда простыми преобразованиями получаем формулу Помпейю (2). Теорема доказана.

Техника доказательства установленной выше леммы порождает следующее геометрическое доказательство теоремы Помпейю.

Доказательство 4. В силу непрерывности функции *f* хорда *AB*, соединяющая концы графика Γ_f данной функции, есть невертикальный отрезок. Этот отрезок описывается уравнением

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}(x - a) + f(a), \; x \in [a;b]. \tag{4}$$

Из (4) следует, что продолжение хорды *AB* пересечет ось *Oy* в точке M_0, имеющей ординату $y_{M_0} = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b - a}$. Рассмотрим угол α, под которым виден график Γ_f функции *f* из точки M_0. В силу ограниченности *f* значение раствора этого угла лежит в промежутке $[0;\pi)$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha > 0$. В данном предположении сторонами угла α будут являться невертикальные лучи, исходящие из точки M_0 и опорные к Γ_f, при этом хотя бы один из них не будет содержать в себе точек хорды *AB*, стягивающей концы кривой Γ_f. Такой луч обозначим *l*. Поскольку Γ_f есть гладкая на интервале (a,b) кривая, то продолжение *l* является касательной к Γ_f в некоторой ее точке $P(c; f(c)), \; c \in (a;b)$. Запишем уравнение этой касательной:

$$y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Полагая в последнем $x = 0$, находим другое представление значения ординаты y_{M_0} точки M_0:

$$y_{M_0} = f(c) + f'(c)(-c).$$

Таким образом, искомой точкой ξ, обосновывающей формулу Помпейю, является найденная точка *c*.

Пусть сейчас $\alpha = 0$. В этом случае функция *f* является линейной, она имеет вид (4). Непосредственно проверкой убеждаемся в том, что для нее формула Помпейю (2) выполняется для любой точки $\xi \in (a;b)$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, все намеченные четыре подхода к обоснованию теоремы Помпейю нами реализованы.

Литература

1. Калинин С. И., Дозморов А. В. Теорема Помпейю и ее обобщения // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: математика, механика, информатика. Сыктывкарский гос. университет. – 2017. – №1(22) – С. 73-79.

2. Dragomir S. S. An inequality of Ostrowski type via Pompeiu’s mean value theorem. J. Ineq. Pure and Appl. Math. 6(3) Art. 83, 2005. http://jipam.vu.edu.au.

3. Pompeiu D. Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis. Mathematica (Cluj, Romania), 22 (1946), 143-146.